OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X-a

Soluţii

1. Se folosește inegalitatea mediilor pentru două numere $A+B \geq 2\sqrt{AB}$, $A, B >0$, de unde $\frac{1}{A+B} \leq \frac{1}{2\sqrt{AB}}$. Vom aplica pentru fiecare fracție din primul membru al ecuației această inegalitate și vom avea: $\frac{1}{2^x+9^x} \leq \frac{1}{2\cdot 3^x \cdot \sqrt{2^x}}$, $\frac{1}{3^x+4^x} \leq \frac{1}{2\cdot 2^x \cdot \sqrt{3^x}}$, $\frac{1}{6^x+1} \leq \frac{1}{2\cdot\sqrt{2^x\cdot 3^x}}$. Adunăm aceste inegalități membru și avem : $\frac{1}{2^x+9^x}+\frac{1}{3^x+4^x}+\frac{1}{6^x+1} \leq \frac{1}{2\cdot 6^x}\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{3^x}+\sqrt{2^x\cdot 3^x}\right)$. Atunci folosind și ecuația avem : $\frac{3^x+2^x+1}{2\cdot 6^x} \leq \frac{\sqrt{2^x}+\sqrt{3^x}+\sqrt{2^x\cdot 3^x}}{2\cdot 6^x}$, adică $3^x+2^x+1 \leq \sqrt{2^x}+\sqrt{3^x}+\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}$. Dar această inegalitate este echivalentă cu : $\left(\sqrt{3^x}-1\right)^2+\left(\sqrt{2^x}-1\right)^2+\left(\sqrt{3^x}-\sqrt{2^x}\right)^2 \leq 0$. De unde fiecare paranteză este egală cu 0 și se obține soluția unică $x = 0$.

2.a). Deoarece x, y sunt numere reale și strict pozitive egalitatea $x+y=xy$, se mai poate scrie și în forma $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. Dacă $x=\log_2 6$ și $y=\log_3 6$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_6 2+\log_6 3=1$.

Pentru inegalitate avem $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\log_6 3-\log_6 2=\log_6\frac{3}{2}$. Trebuie să arătăm că $\log_6\frac{3}{2}<\frac{1}{4}$, inegalitate care este echivalentă cu $\frac{3}{2}<6^{\frac{1}{4}}$. Ridicând la puterea a patra avem că $\frac{81}{16}<6$, inegalitate adevărată. Deci am arătat că $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$.

b). Vom arăta mai întâi că $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}>\frac{1}{5}$, inegalitate care înseamnă de fapt $\log_6\frac{3}{2}>\frac{1}{5}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{3}{2}>6^{\frac{1}{5}}$. Ridicăm la puterea a cincea și avem $\frac{243}{32}>6$, inegalitate adevărată.

Avem deci $\frac{1}{5}<\frac{1}{y}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$. Folosind și faptul că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, vom avea $\begin{cases}\frac{1}{5}<1-\frac{2}{x}<\frac{1}{4}\\ \frac{1}{5}<\frac{2}{y}-1<\frac{1}{4}\end{cases}$, de unde vom obține că $\frac{5}{2}<x<\frac{8}{3}$ și $\frac{8}{5}<y<\frac{5}{3}$. De aici avem că $x^2+y^2>\frac{25}{4}+\frac{64}{25}=\frac{625+256}{100}=8{,}81$.

3. Vom rezolva mai întâi ecuația $f(x)=1$. Ridicăm la puterea a treia folosind formula $(A-B)^3=A^3-B^3-3AB(A-B)$, unde *A* este primul radical și *B* este cel de-al doilea. În urma acestei delicate operațiuni obținem $2-3\sqrt[3]{x^2-1}=1$, care conduce la $\sqrt[3]{x^2-1}=\frac{1}{3}$. Apare aici o condiție suplimentară $x^2-1>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Ridicăm încă o dată la puterea a treia și obținem soluțiile $x_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{21}}{9}$ care sunt ok. O metodă alternativă de rezolvare este următoarea.

Notăm $\sqrt[3]{x+1}=a$ și $\sqrt[3]{x-1}=b$ și vom avea sistemul

$$\begin{cases}a^3-b^3=2\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)(a^2+ab+b^2)=2\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+b^2=2\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3b^2+3b-1=0\\ a=b+1\end{cases}$$

În urma rezolvării sistemului se obțin aceleași soluții.

Pentru ecuația a doua , abordată frontal prin ridicarea la puterea a treia vom obține $2-3\cdot3\sqrt[3]{x^2-1}=27$, care conduce la $\sqrt[3]{x^2-1}=-\frac{25}{9}$. Condiția suplimentară impune $x^2-1<0\Leftrightarrow x\in(-1,1)$. Ridicând la puterea a treia obținem $x^2=1-\left(\frac{25}{9}\right)<0$, deci ecuația nu are soluții. Folosind metoda alternativă se ajunge la o ecuație de grad doi în necunoscuta *b* care are discriminantul negativ deci nu avem soluții.

Revenind la ecuația $f(x)=\alpha$, pentru a afla numărul soluțiilor trebuie să determinăm Im*f*. Pentru asta să remarcăm că $f(x)>0,\forall x\in R$, lucru care este evident, apoi $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, iar din rezolvarea celor două ecuații avem bănuiala (care se va transforma în certitudine) că $f(x)\le 2,\forall x\in R$.

Vom arăta deci că Im*f* = $(0,2]$. Deoarece funcția f este pară este suficient să studiem funcția pe intervalul $[0,\infty)$. Vom arăta deci că $\forall y\in(0,2]$, $\exists x\in[0,\infty)$ astfel încât $f(x)=y$, adică $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=y$. Dacă notăm $\sqrt[3]{x+1}=a$ și $\sqrt[3]{x-1}=b$, vom avea $a-b=y$ și $a^3-b^3=2$. Dar $a=b+y$ și înlocuind vom avea

$$(b+y)^3-b^3=2\Rightarrow 3b^2y+3by^2+y^3-2=0\Rightarrow 3yb^2+3y^2b+(y^3-2)=0,\quad (1)$$

Vom considera această relație ca o ecuație de grad doi în necunoscuta *b*. Calculând discriminantul $\Delta = 3y(8-y^3) \geq 0$, în ipoteza în care lucrăm. Deci ecuația (1) are două soluții reale. Notăm aceste soluții cu b_1 și b_2. Suma acestor două soluții din relațiile lui Viete este $-\frac{3y^2}{3y} = -y \in [-2,0)$. Dacă ambele rădăcini ar fi mai mici decât -1 ar rezulta că $b_1 + b_2 < -2$, adică $-y < -2$. Contradicție. Deci există *b*>-1, care verifică ecuația (1), dar asta înseamnă de fapt că există $x \geq 0$, care verifică relația $f(x) = y$, unde $y \in (0,2]$. Să remarcăm că *x* = 0 este punct de maxim pentru *f*. Revenind la discuția ecuației $f(x) = \alpha$, este clar acum că :

- dacă $\alpha \in (0,2)$, ecuația are două soluții opuse

- dacă $\alpha = 2$, atunci avem soluția unică *x* = 0

- dacă $\alpha \leq 0$ sau $\alpha > 2$, atunci ecuația nu are soluții.

Discuția ecuației $f(x) = \alpha$ mai poate fi abordată și în următorul mod. Presupunem că există $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ astfel încât ecuația să aibă soluții. Atunci există și $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \beta$. Din cele două relații prin adunare și scădere avem că $\sqrt[3]{x+1} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, de unde $x = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3 - 1$ și $\sqrt[3]{x-1} = \frac{\beta-\alpha}{2}$, de unde $x = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + 1$. Prin egalarea celor două valori ale lui *x* vom obține relația $\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 = 8$, iar de aici avem că $\beta^2 = \frac{8-\alpha^3}{3\alpha} \geq 0$. Deoarece $\alpha > 0$, vom avea de aici că $8 - \alpha^3 \geq 0$, de unde $\alpha \leq 2$. Finalizarea e aceeași.

4. a). (Soluția 1) Considerăm punctele *A* de afix z_1, *B* de afix z_2, și *C* de afix z_3

Dacă numerele complexe z_1, z_2, z_3 verifică relația $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ atunci ele sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral. Vom justifica acest fapt.

Fie $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ și avem și relația $z_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_1 = 0$. Prin scădere rezultă $\varepsilon(z_2 - z_1) + \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0 \Leftrightarrow (z_2 - z_1) = \varepsilon(z_1 - z_3) \Rightarrow |z_2 - z_1| = |\varepsilon||z_1 - z_3|$, de unde $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$, dar asta înseamnă că *AB=AC*. Analog *AB=BC*, prin urmare triunghiul *ABC* este echilateral.

În cazul nostru avem $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = x - \varepsilon y + \varepsilon y - \varepsilon^2 z + \varepsilon^2 z - x = 0$, deci numerele noastre sunt afixe de vârfuri de triunghi echilateral.

(Soluția 2) Vom arăta că $C(z_3)$ se obține din $B(z_2)$ printr-o rotație de centru $A(z_1)$ și unghi $\frac{\pi}{3}$.

Vom nota cu $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Arătăm că $z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)\omega$. Calculăm $z_1 + (z_2 - z_1)\omega = z_1 + (z_2 - z_1)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ se obține z_3. Deci triunghiul nostru este echilateral, fiind isoscel cu un unghi de $\frac{\pi}{3}$.

(Soluția 3) Prin calcul direct avem relațiile : $z_1 + z_2 + z_3 = (1-\varepsilon)(x+y+z)$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -\varepsilon(x+y+z)^2$. Atunci $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = (1-\varepsilon)^2(x+y+z)^2 = -3\varepsilon(x+y+z)^2 = 3(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$, relație care este echivalentă cu $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ (1), care mai poate fi scrisă $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}$, numerele complexe fiind diferite. Dacă $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ relația exprimă faptul că triunghiul ABC este congruent cu triunghiul BCA, deci toate unghiurile sunt congruente între ele, la fel și laturile. Deci triunghiul ABC este echilateral.

b). Vom calcula latura triunghiului

$$l^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = [(x-y) + \varepsilon(z-y)][(x-y) + \varepsilon^2(z-y)] =$$
$$(x-y)^2 + (z-y)^2 - (x-y)(z-y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

Am folosit faptul că $\varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2$.

Ca o paranteză calculul laturii poate fi folosit și pentru justificarea faptului că triunghiul este echilateral. Tot din ipoteză știm $|z_1| = 1$, de unde $|z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow (x - \varepsilon y)(x - \varepsilon^2 y) = 1$. Obținem că $x^2 + xy + y^2 = 1$. Analog $y^2 + yz + z^2 = 4, \quad z^2 + zx + x^2 = 9$. Prin adunare se obține $l^2 = 7$ și de aici $S_{\Delta ABC} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$.